۱.۱.۷ انتگرال مجازی

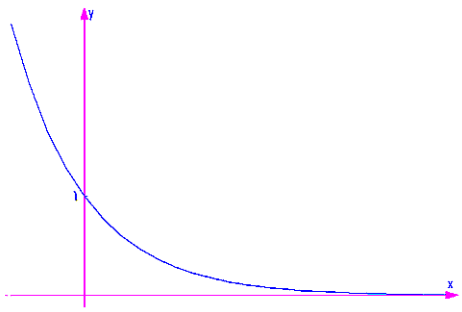
برای تابع پیوستهٔ $y = f(t)$ که روی $[a, +\infty)$ تعریف می شود انتگرال مجازی یا ناسره بشکل زیر بیان می گردد:

$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(t)dt \quad , \quad a < A \in \mathbb{R}$$

اگر این حد موجود و متناهی باشد انتگرال را **همگرا** و در غیر اینصورت آنرا **واگرا** گوئیم.

مثال ۱.۷ با ثابت غیر صفر c و $t \geq 0$، برای تابع $f(t) = e^{ct}$ داریم

$$\int_0^\infty e^{ct}dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{ct}dt = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{ct}}{c}\Big|_0^A = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{cA}-1}{c} = \begin{cases} -\frac{1}{c} & c < 0 \\ \infty & c \geq 0 \end{cases}$$



شکل ۱.۷ نمودار تابع $y = e^{-x}$. روشن است که $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

مثال ۲.۷ برای $t \geq 1$ انتگرال مجازی تابع $f(t) = \frac{1}{t}$ واگراست زیرا

$$\int_1^\infty \frac{1}{t}dt = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{1}{t}dt = \lim_{A\to\infty} \ln|A| = \infty$$

مثال ۳.۷ برای تابع $f(t) = \frac{1}{t^p}$ روی $t \geq 1$ داریم

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^p} = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{dt}{t^p} = \lim_{A\to\infty} \frac{t^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^A = \lim_{A\to\infty} \frac{A^{1-p}-1}{1-p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & p > 1 \\ \infty & p \leq 1 \end{cases}$$

یک روش ساده برای بررسی همگرائی انتگرالها آزمون مقایسه است:

تعریف ۱.۷ (آزمون مقایسه) فرض کنید $f(t)$ برای $t \geq a$ تکه‌ای پیوسته[۱] و بازاء یک M و $t \geq M$، $|f(t)| \leq g(t)$ باشد که $g(t)$ تابعی پیوسته است. اگر $\int_M^\infty g(t)dt$ همگرا باشد پس $\int_M^\infty f(t)dt$ نیز همگرا خواهد بود.

زیرا روی $[M, +\infty)$ چون $f(t) \leq g(t)$ طبق خواص انتگرال $\int_M^\infty f(t)dt \leq \int_M^\infty g(t)dt$ و اگر $\int_M^\infty g(t)dt = K$ یعنی $\int_M^\infty f(t)dt \leq K$.

مثال ۴.۷ انتگرال مجازی $\int_۱^\infty \frac{\sin t}{t^p}dt$ برای $p > ۱$ همگراست زیرا $\left|\frac{\sin t}{t^p}\right| \leq \frac{۱}{t^p}$ که از مثال ۳.۷ و آزمون مقایسه استفاده می کنیم.

۲.۱.۷ تابع گاما

تابع گاما برای pهای حقیقی بصورت انتگرال مجازی زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(p) = \int_۰^\infty e^{-t}t^{p-۱}dt$$

این انتگرال بازاء هر p−ی مثبتی همگراست و براحتی با جزء به جزء می توان این خاصیت مهم را ثابت کرد که

$$\Gamma(p+۱) = p\ \Gamma(p)$$

از آنجا که $\Gamma(۱) = ۰! = ۱$ برای n−های صحیح مثبت فاکتوریل بصورت $\Gamma(n) = (n-۱)!$ قابل بیان بوده و با این تابع می توان فاکتوریل را برای اعداد حقیقی نیز تعریف نمود. با روشهای انتگرالگیری می توان ثابت نمود که $\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}$ و عملاً ما را قادر می سازد تا برخی مسائل مجهول را قابل حل سازیم. به مثال های زیر توجه کنید:

$$\Gamma(\frac{۵}{۲}) = \frac{۳}{۲}\Gamma(\frac{۳}{۲}) = \frac{۳}{۲}\frac{۱}{۲}\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \frac{۳}{۲}\frac{۱}{۲}\sqrt{\pi}$$
$$\frac{\Gamma(۴)\Gamma(۱/۵)}{\Gamma(۳/۵)} = \frac{۳! \times \frac{۱}{۲} \times \Gamma(\frac{۱}{۲})}{\frac{۵}{۲} \times \frac{۳}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \Gamma(\frac{۱}{۲})} = \frac{۸}{۵}$$

همچنین از تابع گاما می توان برای حل برخی انتگرالها کمک گرفت:

$$\int_۰^\infty t^۳ e^{-t}dt = \Gamma(۴) = ٦$$

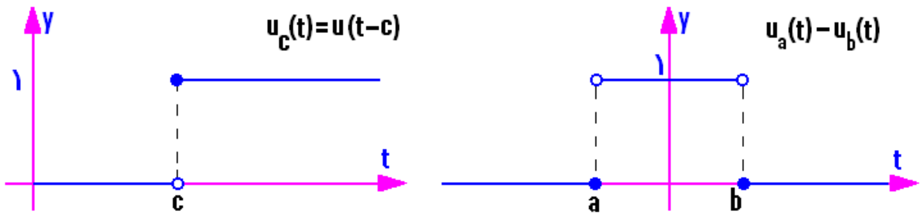
[۱]− تابع $y = f(t)$ را **تکه‌ای پیوسته** گوئیم اگر تابع بجز حداکثر در تعداد متناهی نقطه پیوسته باشد.

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \int_{۰}^{\infty} t^{-\frac{۱}{۲}}e^{-t}dt = \int_{۰}^{\infty} t^{\frac{۱}{۲}-۱}e^{-t}dt = \Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}$$
$$\int_{۰}^{۱} x\ln^{۲} x\, dx = \int_{-\infty}^{۰} u^{۲}e^{۲u}du = \frac{۱}{۸}\int_{۰}^{\infty} t^{۲}e^{-t}dt = \frac{۱}{۸}\Gamma(۳) = \frac{۱}{۴}$$
$$\int_{۰}^{\infty} x^{\frac{۱}{۵}}e^{-۲\sqrt{x}}dx = \int_{۰}^{\infty} t^{\frac{۷}{۵}}e^{-t}dt = \frac{۱}{۲\sqrt[۵]{۴}}\Gamma(\frac{۱۲}{۵})$$

۳.۱.۷ تابع هِوی ساید و تابع ضربه

تابع هِوی ساید[۲] یا همان **تابع پله‌ای واحد**، به شکل $u(t) = \begin{cases} ۱ & t \geq ۰, \\ ۰ & t < ۰. \end{cases}$ تعریف شده و جهت ملاحظات بعدی با فرض $c \geq ۰$ بصورت

$$u_c(t) = u(t-c) = \begin{cases} ۱ & t \geq c, \\ ۰ & t < c. \end{cases}$$



شکل ۲.۷ شکل و نمودار توابع پله‌ای

بیان می شود که به آن **تابع پله‌ای واحد حول** c نیز گویند. از این تابع جهت سهولت در استفاده از توابع تکه ای پیوسته بهره خواهیم برد.

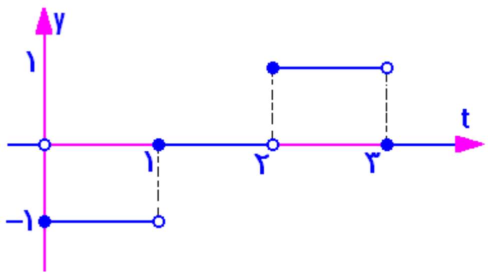
مطلب ۱.۷ اگر

$$g(t) = \begin{cases} g_۱(t) & ۰ \leq t < c_۱, \\ g_۲(t) & c_۱ \leq t < c_۲, \\ g_۳(t) & c_۲ \leq t < c_۳, \\ \vdots & \\ g_{n-۱}(t) & c_{n-۲} \leq t < c_{n-۱}, \\ g_n(t) & t \geq c_{n-۱}. \end{cases} \tag{۱}$$

سپس

$$g = g_۱ + u_{c_۱}(g_۲ - g_۱) + u_{c_۲}(g_۳ - g_۲) + \cdots + u_{c_{n-۱}}(g_n - g_{n-۱}) \tag{۲}$$

[۲]– الیور هویساید (۱۸۵۰ – ۱۹۲۵) فیزیکدان و ریاضیدان انگلیسی کاشف یونوسفر



شکل **۳.۷** نمودار تابع $g(t)$

مثلا برای شکل بالا از آنجاکه

$$g(t)=\begin{cases} -۱ & ۰\leq t<۱,\\ ۰ & ۱\leq t<۲,\\ ۱ & ۲\leq t<۳,\\ ۰ & t\geq ۳.\end{cases}$$

بنابر (۲) نتیجه می گیریم:

$$g(t)=-۱+u_۱(t)(۰+۱)+u_۲(t)(۱-۰)+u_۳(t)(۰-۱)=u_۱(t)+u_۲(t)-u_۳(t)-۱$$

تابع ضربه تابعی است با پارامتر $\varepsilon>۰$ و مورد استفاده در فیزیک که بصورت[۳]

$$d_\varepsilon(t)=\begin{cases} \frac{۱}{\varepsilon} & ۰\leq t\leq\varepsilon,\\ ۰ & t<۰\ ,\ t>\varepsilon.\end{cases} \qquad (۳)$$

تعریف می شود و برای پدیده هائی است که در زمانی بسیار کوتاه رخ داده و اثرات شدیدی بر جای می گذارد. می توان نشان داد که $d_\varepsilon(t)=\frac{۱}{\varepsilon}\left[u_۰(t)-u_\varepsilon(t)\right]$. برای تابع ضربه براحتی ثابت می شود که $\int_{-\infty}^{\infty}d_\varepsilon(t)dt=۱$ که نشان می دهد سطح زیر نمودار ناصفر است هر چند مقدار ε بسیار کوچک باشد، همچنین

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\varepsilon\to ۰}d_\varepsilon(t)dt=\lim_{\varepsilon\to ۰}\int_{-\infty}^{\infty}d_\varepsilon(t)dt=\lim_{\varepsilon\to ۰}\int_۰^{\varepsilon}\frac{۱}{\varepsilon}dt=\lim_{\varepsilon\to ۰}\frac{t}{\varepsilon}\Big|_۰^{\varepsilon}=۱$$

---

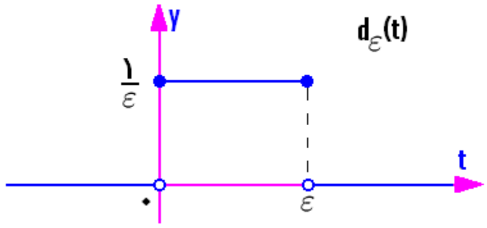
[۳]— در برخی نوشته ها، تابع ضربه یا شوک را بصورت

$$d_\varepsilon(t)=\begin{cases} \frac{۱}{۲\varepsilon} & |t|\leq\varepsilon,\\ ۰ & |t|>\varepsilon.\end{cases} \qquad (۴)$$

تعریف می کنند. هرچند این تعریف مفیدتر از (۳) است و آنرا توزیعی بی ارتباط با توزیعهای احتمالی قلمداد کرده و از توابع محض ریاضی بشمار نمی رود، لیکن با توجه به تعریفات آتی از لاپلاس لازم است آنرا برای روی مثبت تعریف نموده و همچنین نتایج متعاقب تعریف (۴) متفاوت از تعریف (۳) خواهد بود.

لذا می توان **تابع ضربه واحد** را بصورت $\delta(t) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} d_\varepsilon(t)$ تعریف نمود که به **تابع دلتای دیراک**[۴] یا فقط **تابع دلتا** نیز موسوم است.

$$\delta(t) = 0 \quad (t \neq 0) \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$



شکل ۴.۷ نمودار تابع ضربه

مطلب ۲.۷ اگر تابع $f(t)$ بر $[0, +\infty)$ پیوسته باشد سپس برای $a \geq 0$

$$\int_0^\infty \delta(t-a)f(t)dt = f(a) \tag{۵}$$

اثبات این مطلب با قضیهٔ مقدار میانگین و فشردگی براحتی قابل انجام است.

۴.۱.۷ عملگر یا تبدیل لاپلاس

برای تابع $y = f(t)$ که روی بازهٔ $[0, \infty)$ تعریف شده، تبدیل (یا عملگر) لاپلاس را برای $s > 0$ چنین تعریف می کنیم[۵]

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

مسلماً تبدیل وقتی وجود دارد که انتگرال مجازی همگرا باشد، پس ممکن است تابع $f(t)$ تنها در ناحیه‌ای مانند $s \geq s_0$ دارای لاپلاس باشد و دراینصورت آنرا ناحیهٔ همگرائی یا ناحیهٔ وجود

[۴]– از پاول دیراک (۱۹۰۲ – ۱۹۸۴) فیزیکدان انگلیسی

[۵]– منظور از تبدیل یا عملگر، رابطه‌ای است که یک تابع را به تابع دیگری می نگارد. مثل تبدیل مشتق $D(f(x)) = f'(x)$ و تبدیل انتگرال $I(f(x)) = \int_a^x f(t)dt$ و یا عملگر ضربی $M_\phi(f) = \phi f$. تبدیلات انتگرالی که مفیدترین ابزار حل معادلات خطی اند بصورت زیر تعریف می شوند:

$$T(s) = \int_\alpha^\beta K(s,t)f(t)dt \quad ; \quad s \in \mathbb{R}$$

که $K(s,t)$ را هستهٔ تبدیل گوئیم و $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$. این تبدیلات عموماً خطی بوده و اگر هستهٔ تبدیل $K(s,t)$ برابر e^{-st} باشد، تبدیل لاپلاس روی $[0, +\infty)$ ایجاد می گردد. در حالت کلی تر s متغیری مختلط است. وقتی هسته تبدیل $\sin st$ و $\cos st$ است این تبدیل همان ضرایب فوریه a_s و b_s بوده و وقتی $K(s,t) = e^{-iwt}$ تبدیل فوریه مختلط روی $\mathbb{R}$ ایجاد می گردد.

لاپلاس گوئیم. در این تعریف $\mathcal{L}$ عملگر لاپلاس است که روی تابع $f(t)$ اثر کرده و حاصل آن تابع $F(s)$ خواهد بود. به سهولت ثابت می شود که تبدیل لاپلاس خطی است به این معنی که برای توابع $f(t)$ و $g(t)$ و ثوابت حقیقی α و β داریم:

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{L}(f) + \beta\mathcal{L}(g)$$

زیرا انتگرال خاصیت خطی دارد. اما این تبدیل برای چه توابعی قابا تعریف بوده و یا انتگرال تبدیل روی چه فواصلی همگرا خواهد بود. قبل از بیان شرط وجود تبدیل لاپلاس برای یک تابع، ذکر کنیم که تابع $f(t)$ برای $t > A$ از **مرتبهٔ نمائی** است اگر ثابت های حقیقی a و $k > 0$ چنان موجود باشند که برای $t > A$ داشته باشیم $|f(t)| \leq ke^{at}$.

مثال ۵.۷ نشان دهید تابع t^n برای هر n طبیعی از مرتبهٔ نمائیست.

حل. با استفاده از بسط سری e^t و n–ی دلخواه داریم:

$$\begin{aligned} e^t &= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots \\ &> 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \\ &> \frac{t^n}{n!} \\ n!e^t &> t^n \end{aligned}$$

بنابراین $t^n < n!e^t$.

مثال ۶.۷ نشان دهید تابع $\sinh at$ برای هر a حقیقی از مرتبهٔ نمائی است.

حل. با استفاده از تعریف داریم $\sinh at = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at}) < \frac{1}{2}(e^{at}) < e^{at}$.

مطلب ۳.۷ فرض کنید تابع f برای $t \geq 0$ تکه‌ای پیوسته و بازای Aی مثبتی، وقتی $t \geq A$ دارای مرتبهٔ نمائی باشد، در اینصورت برای a مثبتی تبدیل لاپلاس $f(t)$ روی $s > a$ موجود است.

زیرا از آنجائی که $f(t)$ دارای مرتبهٔ نمائی است برای a و $k > 0$–ی روی $[A, +\infty)$ می بایست $|f(t)| \leq ke^{at}$ باشد پس طبق تعریف لاپلاس تابع

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^A e^{-st} f(t)dt + \int_A^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad (6)$$

برای f پیوسته، انتگرال اول همیشه وجود دارد و برای انتگرال دوم نیز چون

$$|e^{-st} f(t)| \leq e^{at} k e^{-st} = ke^{-(s-a)t}$$

$F(s)$ برای $s > a$ همگراست. همچنین با استفاده از تساوی (۶) بالا

$$|F(s)| \leq \int_A^\infty ke^{-(s-a)t}dt \leq \frac{k}{s-a}$$

و نتیجه می گیریم $\lim_{s\to\infty} F(s) = ۰$ مطابق این حد[۶]، هر کسر با صورت و مخرج چند جمله‌ای که درجه صورتش از مخرج کمتر باشد تبدیل لاپلاس یک تابع خواهد بود. از طرف دیگر اگر برای تابع مفروضی مانند $F(s)$ این حد موجود نبوده یا غیرصفر شود، نتیجه می گیریم که $F(s)$ تبدیل لاپلاس هیچ تابعی نیست و طبق وجود این حد، ترکیبات خطی از s، e^s، $\ln s$، $\sin s$ و $\cos s$ نیز تبدیل لاپلاس هیچ تابعی نخواهند بود.

تمرین ۱.۷ .

۱) با استفاده از تعریف ثابت کنید عملگر لاپلاس خطی است.

۲) با استفاده از تعریف، لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

$$(c) \quad f(t) = t \quad , \quad (d) \quad f(t) = t^۲ \quad , \quad (e) \quad f(t) = t^n \quad (n \geq ۱)$$

$$(a) \quad f(t) = \begin{cases} ۳ & t \leq ۲, \\ ۵ & t > ۲. \end{cases} \quad , \quad (b) \quad g(t) = \begin{cases} t & ۰ \leq t < ۳, \\ ۱ & t \geq ۳. \end{cases}$$

۳) نشان دهید تابع $e^{t^۲}$ از مرتبهٔ نمائی نیست.

۴) با روش مستقیم نشان دهید لاپلاس $e^{t^۲}$ وجود ندارد.

۵) با روش مستقیم ثابت کنید که تابع $f(t) = \frac{۱}{t}$ دارای تبدیل لاپلاس نیست.

۶) آیا دو تابع متفاوت $f(t)$ و $g(t)$ می توانند دارای یک تبدیل لاپلاس باشند؟

۷) نشان دهید:

$$\int_۰^\infty e^{-t^۲}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{۲} \qquad ; \qquad \int_۰^\infty e^{-a^۲t^۲}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{۲a} \quad , \quad (a > ۰)$$

۸) با استفاده از خواص تابع گاما حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$(a) \quad \frac{\Gamma(۴/۵)\Gamma(۵/۵)}{\Gamma(۷/۵)} \quad , \quad (b) \quad \int t^۶e^{-۳t}dt \quad , \quad (c) \quad \int \sqrt{x}e^{-x^۳}dx$$

[۶]— البته این حد در حالت کلی تر بشرطی که $F(s)$ موجود باشد نیز صحیح است هرچند $f(t)$ تکه ای پیوسته نبوده و یا از مرتبهٔ نمائی نیز نباشد پس این شرایط کافی اند. مطابق آن، توابعی هستند که تبدیل لاپلاس دارند ولی در شرایط قضیه صدق نمی کنند مثلاً تابع $f(t) = \frac{۱}{\sqrt{t}}$ در صفر ناپیوسته است پس در فاصله $۰ \leq t \leq A$ تکه‌ای پیوسته نیست. ولی دارای لاپلاس بوده و خواهیم دید که $\mathcal{L}(f(t)) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$.

۲.۷ لاپلاس توابع مختلف

هرچند هر تابعی لاپلاس ندارد با وجود این هر تابعی نیز که دارای تبدیل لاپلاس است، همه جا دارای تبدیل نبوده و ممکن است تنها روی بازه‌ای خاص دارای تبدیل باشد (مطلب؟؟). با استفاده از تعریفی که از تبدیل لاپلاس ارائه شد، اکنون می توانیم تبدیل لاپلاس چند تابع مختلف را بدست آوریم:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(1) &= \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}dt = \lim_{A\to\infty}\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^A = \begin{cases} \frac{1}{s} & s>0, \\ \infty & s\le 0. \end{cases} \\
\mathcal{L}(e^{ct}) &= \int_0^\infty e^{(c-s)t}dt = \lim_{A\to\infty}\frac{e^{(c-s)t}}{c-s}\Big|_0^A = \begin{cases} \frac{1}{s-c} & s>c, \\ \infty & s\le c. \end{cases} \\
\mathcal{L}(t^3) &= \int_0^\infty t^3 e^{-st}dt = \lim_{A\to\infty}\frac{-e^{-st}(s^3t^3+3s^2t^2+6st+6)}{s^4}\Big|_0^A \\
&= \begin{cases} \frac{6}{s^4} & s>0, \\ \infty & s\le 0. \end{cases} \\
\mathcal{L}(t^p) &= \int_0^\infty e^{-st}t^p dt = \int_0^\infty e^{-w}(\frac{w}{s})^p d(\frac{w}{s}) = \frac{1}{s^{p+1}}\int_0^\infty e^{-w}w^p dw \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} \qquad (p>-1) \quad , \quad s>0 \\
\mathcal{L}(\sin at) &= \int_0^\infty e^{-st}\sin at\ dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\sin at\ dt \\
&= \lim_{A\to\infty}\frac{-s\sin at - a\cos at}{s^2+a^2}e^{-st}\Big|_0^A = \frac{a}{s^2+a^2} \qquad , \quad s>0 \\
\mathcal{L}(\cos at) &= \int_0^\infty e^{-st}\cos at\ dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\cos at\ dt \\
&= \lim_{A\to\infty}\frac{-s\cos at + a\sin at}{s^2+a^2}e^{-st}\Big|_0^A = \frac{s}{s^2+a^2} \qquad , \quad s>0 \\
\mathcal{L}(\sinh at) &= \mathcal{L}(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}) = \frac{a}{s^2-a^2} \qquad , \quad s>|a|
\end{aligned}
$$

که فرمول آخر از خطی بودن لاپلاس نتیجه می شود[۷]. برای لاپلاس تابع t^p با توجه به همگرائی انتگرال می بایست $p>-1$ باشد. به مثال های زیر توجه نمائید.

$$\mathcal{L}(t^9) = \frac{\Gamma(10)}{s^{10}} = \frac{9!}{s^{10}}$$

۷– برای محاسبهٔ $\mathcal{L}(\sin at)$ و $\mathcal{L}(\cos at)$ از فرمول های زیر استفاده کرده‌ایم

$$\int e^{at}\sin bt\ dt = \frac{a\sin bt - b\cos bt}{a^2+b^2}e^{at} \quad ; \quad \int e^{at}\cos bt\ dt = \frac{a\cos bt + b\sin bt}{a^2+b^2}e^{at}$$

$$\mathcal{L}(t^{-\frac{1}{2}}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{s^{-\frac{1}{2}+1}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

$$\mathcal{L}(t^{\frac{1}{2}}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{L}(x^5\sqrt{x}) = \mathcal{L}(x^{\frac{11}{2}}) = \frac{\Gamma(\frac{11}{2})}{s^{\frac{13}{2}}} = (\frac{11}{2})(\frac{9}{2})(\frac{7}{2})(\frac{5}{2})(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})\sqrt{\pi}s^{\frac{13}{2}}$$

$$\mathcal{L}(\sin^2 x) = \mathcal{L}(\frac{1-\cos 2x}{2}) = \frac{1}{2}[\mathcal{L}(1) - \mathcal{L}(\cos 2x)] = \frac{1}{2}[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}] = \frac{1}{2s(s^2+1)}$$

بعلاوه برای توابع چند ضابطه‌ای بصورت زیر عمل می کنیم.

مثال ۷.۷ مطلوبست لاپلاس تابع
$$g(t) = \begin{cases} 4 & 0 \le t < 5, \\ 0 & t \ge 5. \end{cases}$$

حل. از تعریف لاپلاس نتیجه می شود که

$$\mathcal{L}(g(t)) = \int_0^\infty e^{-st}g(t)dt = \int_0^5 4e^{-st}dt = 4\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^5 = \frac{4(1-e^{-5s})}{s}$$

مطلب ۴.۷ **(جدول تبدیلات لاپلاس)** با توجه به آنچه ثابت کردیم می توان با استفاده از تعریف لاپلاس توابع مختلفی را بدست آورد. در جدول زیر کاربردی ترین توابعی را ذکر می کنیم که تبدیل لاپلاس آنها وجود دارد.

$f(t)$		$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$		
1	$\Longrightarrow$	$\frac{1}{s}$	$,\quad s > 0$	
t	$\Longrightarrow$	$\frac{1}{s^2}$	$,\quad s > 0$	
t^n	$\Longrightarrow$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$,\quad s > 0$	$(n \ge 0)$
t^p	$\Longrightarrow$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$	$,\quad s > 0$	$(p > -1)$
e^{cx}	$\Longrightarrow$	$\frac{1}{s-c}$	$,\quad s > c$	
$\sin at$	$\Longrightarrow$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$,\quad s > 0$	
$\cos at$	$\Longrightarrow$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$,\quad s > 0$	
$\sinh at$	$\Longrightarrow$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$,\quad s > \|a\|$	
$\cosh at$	$\Longrightarrow$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$,\quad s > \|a\|$	

از این جدول برای بدست آوردن تبدیل لاپلاس توابع گوناگون استفاده می کنیم. البته خاصیت خطی بودن تبدیل را مد نظر قرار می دهیم.

مثال ۸.۷ تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = ۲\sin ۳t - \cos ۲t + ۴e^{-۴t}$ را بیابید.

حل. مطابق قوانین بالا و خطی بودن تبدیل لاپلاس روی $s > ۳$ می نویسیم

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = ۲\frac{۳}{s^۲+۹} - \frac{s}{s^۲+۴} + ۴\frac{۱}{s+۴} = \frac{۶}{s^۲+۹} - \frac{s}{s^۲+۴} + \frac{۴}{s+۴}$$

مثال ۹.۷ مطلوبست لاپلاس تابع $f(t) = ۴t^۳ + ۵e^{۲t} + ۳\sin ۲t - ۴\cos ۵t - ۸$

حل. مطابق خاصیت خطی بودن و جدول تبدیلات داریم

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \frac{۲۴}{s^۴} + \frac{۵}{s-۲} + \frac{۶}{s^۲+۴} - \frac{۴s}{s^۲+۲۵} - \frac{۸}{s} \quad , \quad s > ۲$$

تمرین ۲.۷ .

۱) با استفاده از جدول تبدیلات لاپلاس و خواص این تبدیل، لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$(a)\quad f(t) = ۴t - ۶ \quad , \quad (b)\quad f(t) = ۳t^۲ + ۲t - ۱$

$(c)\quad f(t) = ۲(t+۳)^۲ \quad , \quad (d)\quad f(t) = t^۳ + ۲e^{-۳t} + e^{۴t}$

$(e)\quad f(t) = ۲e^{۴t} + ۴e^{۲t} \quad , \quad (f)\quad f(t) = e^{۳t-۵}$

$(g)\quad f(t) = ۴e^{t+\frac{۱}{۲}} \quad , \quad (h)\quad f(t) = e^{\alpha t+\beta} \quad ; \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

$(i)\quad f(t) = ۲\sin ۲t + ۴\cos ۲t \quad , \quad (j)\quad f(t) = ۶t + ۴\sin ۳t - ۲\cos ۳t$

$(k)\quad f(t) = ۲\sin ۲t \cos t \quad , \quad (l)\quad f(t) = ۳\sinh ۲t + ۲\cosh ۲t - ۲e^{۲t}$

$(m)\quad f(t) = ۲\sin ۲t - \sin^۲ t \quad , \quad (n)\quad f(t) = \sinh ۲t \cosh ۳t$

$(o)\quad f(t) = ۲ - ۴\sin^۲ ۵t \quad , \quad (p)\quad f(t) = ۳\cosh^۲ t$

$(q)\quad f(t) = \begin{cases} ۲ & ۰ \le t \le ۲, \\ ۰ & t \ge ۲. \end{cases} \quad , \quad (r)\quad f(t) = \begin{cases} -۳ & ۱ \le t < ۱۰, \\ ۱ & t \ge ۱۰. \end{cases}$

$(s)\quad f(t) = \begin{cases} t & ۰ \le t < ۲, \\ e^t & t \ge ۲. \end{cases} \quad , \quad (t)\quad f(t) = \begin{cases} ۱ & ۰ \le t < ۳, \\ \dfrac{۱}{\sqrt{t-۳}} & t \ge ۳. \end{cases}$

۲) با استفاده از جدول تبدیلات لاپلاس و یا بروش مستقیم نشان دهید:

$(a)\quad \mathcal{L}(\sin(at+b)) = \dfrac{s\sin b + a\cos b}{s^۲+a^۲} \quad , \quad (c)\quad \mathcal{L}(e^{at} - ۱ - at) = \dfrac{a^۲}{s^۲(s-a)}$

$(b)\quad \mathcal{L}(\cos(at+b)) = \dfrac{s\cos b - a\sin b}{s^۲+a^۲} \quad , \quad (d)\quad \mathcal{L}(\sin^۲ at) = \dfrac{۲a^۲}{s(s^۲+۴a^۲)}$

۱.۲.۷ خواص انتقال

با فرض اینکه $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ برای یافتن مقدار لاپلاس تابع $e^{ct}f(t)$ کافیست تمام مقادیر s را در لاپلاس تابع به $s-c$ تبدیل کنیم یعنی

$$\mathcal{L}(e^{ct}f(t)) = F(s-c) \qquad , \qquad s>c \tag{۷}$$

بنابراین اگر لاپلاس تابع $f(t)$ برابر $F(s)$ باشد، لاپلاس تابع $e^{ct}f(t)$ عبارتست از $F(s-c)$.
این خاصیت را **اولین انتقال** نامیم.

مثال ۱۰.۷ می دانیم $\mathcal{L}(t^۳) = \frac{۶}{s^۴}$ و $\mathcal{L}(\sin ۲t) = \frac{۲}{s^۲+۴}$ پس

$$\mathcal{L}(t^۳e^{۴t}) = \frac{۶}{(s-۴)^۴} \qquad , \quad s>۴$$
$$\mathcal{L}(t^۳e^{-۲t}) = \frac{۶}{(s+۲)^۴} \qquad , \quad s>۲$$
$$\mathcal{L}(e^{۳t}\sin ۲t) = \frac{۲}{(s-۳)^۲+۴} \quad , \quad s>۲$$

لاپلاس برخی توابع حاصل عمل انتقال بر روی آنها بصورت زیر است.

$$\begin{array}{rcll}
e^{ct}f(t) & \Longrightarrow & F(s-c) & , \quad s>a+c \\
e^{ct}t^n & \Longrightarrow & \dfrac{n!}{(s-c)^{n+۱}} & , \quad s>c \\
e^{ct}\sin at & \Longrightarrow & \dfrac{a}{(s-c)^۲+a^۲} & , \quad s>c \\
e^{ct}\cos at & \Longrightarrow & \dfrac{(s-c)}{(s-c)^۲+a^۲} & , \quad s>c \\
e^{ct}\sinh at & \Longrightarrow & \dfrac{a}{(s-c)^۲-a^۲} & , \quad s>c+|a| \\
e^{ct}\cosh at & \Longrightarrow & \dfrac{(s-c)}{(s-c)^۲-a^۲} & , \quad s>c+|a|
\end{array}$$

مثال ۱۱.۷ مطلوبست لاپلاس تابع $\sin ax \sinh ax$.

حل.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\sin ax\sinh ax) &= \mathcal{L}(\sin ax.\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{۲}) \\
&= \frac{۱}{۲}\mathcal{L}(e^{ax}\sin ax) - \frac{۱}{۲}\mathcal{L}(e^{-ax}\sin ax) \\
&= \frac{۱}{۲}\frac{a}{(s-a)^۲+a^۲} - \frac{۱}{۲}\frac{a}{(s+a)^۲+a^۲} \\
&= \frac{۲a^۲s}{s^۲+۴a^۲}
\end{aligned}$$

تبدیل لاپلاس تابع هویساید برای $c \geq ۰$ چنین است:

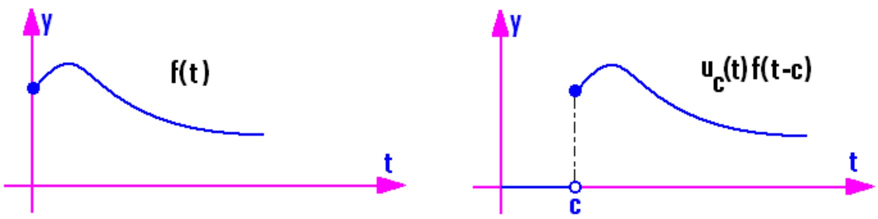
$$\mathcal{L}(u_c(t)) = \mathcal{L}(u(t-c)) = \int_c^\infty e^{-st}dt = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_c^A = \frac{e^{-cs}}{s} \qquad (۸)$$

که برای $s > ۰$ تعریف می شود. بازای $c \leq ۰$ نیز $\mathcal{L}(u_c(t)) = \frac{۱}{s}$ است. این تابع دارای استفاده های فراوانی در بیان لاپلاس توابع چند ضابطه‌ای (پیوستهٔ تکه‌ای) است. علاوه بر این اگر $\mathcal{L}(f) = F$ و

$$g(t) = \begin{cases} ۰ & , \ t < c, \\ f(t-c) & , \ t > c. \end{cases} = u_c(t)f(t-c)$$

آنگاه $\mathcal{L}(g(t)) = e^{-cs}F(s)$ زیرا

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_c(t)f(t-c)) &= \int_۰^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt \\ &= \int_c^\infty e^{-st}f(t-c)dt \\ &= \int_۰^\infty e^{-s(x+c)}f(x)dx \qquad ; \qquad t-c=x \\ &= e^{-sc}\int_۰^\infty e^{-sx}f(x)dx \\ &= e^{-cs}F(s) \qquad (۹) \end{aligned}$$



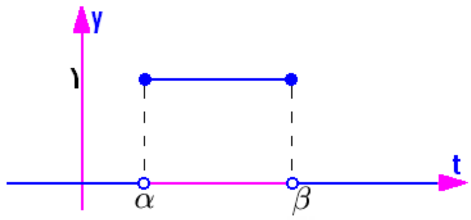
شکل ۵.۷ انتقال تابع بموازات محور عرضها به اندازه $+c$

و آن را **دومین انتقال** نامیم. بوضوح برای $f(x) = ۱$ همان فرمول (۸) را نتیجه می‌دهد. مثلاً طبق خاصیت دوم انتقال داریم

$$\mathcal{L}[u_\pi(t)\cos ۴(t-\pi)] = e^{-\pi s}\frac{s}{s^۲ + ۱۶}$$

$$\mathcal{L}[u_\pi(t)\sin(t-\pi)] = e^{-\pi s}\frac{۱}{s^۲ + ۱}$$

مثال ۱۲.۷ لاپلاس تابع $g(t)=\begin{cases} \circ & t<\alpha, \\ ۱ & \alpha\leq t\leq\beta, \\ \circ & t>\beta. \end{cases}$ چیست؟ $(\beta\geq\alpha\geq\circ)$



شکل ۶.۷ نمودار تابع مثال ۱۲.۷

حل. با استفاده از تابع پله‌ای چنین می نویسیم $g(t)=u(t-\alpha)-u(t-\beta)=u_\alpha(t)-u_\beta(t)$ که با لاپلاس گیری چنین می شوند:

$$\mathcal{L}(g(t))=\mathcal{L}(u_\alpha(t))-\mathcal{L}(u_\beta(t))=\frac{e^{-\alpha s}}{s}-\frac{e^{-\beta s}}{s}=\frac{e^{-\alpha s}-e^{-\beta s}}{s} \qquad (۱\circ)$$

مثال ۱۳.۷ لاپلاس تابع $g(x)=\begin{cases} x^۲+۴x+۵ & , x\geq ۳, \\ \circ & , x<۳. \end{cases}$ چیست؟

حل. چون $g(x)=(x^۲+۴x+۵)\begin{cases} ۱ & , x\geq ۳, \\ \circ & , x<۳. \end{cases}$ پس با تغییر متغیر $x=t+۳$ روی تابع $x^۲+۴x+۵$ داریم

$$f=x^۲+۴x+۵=(t+۳)^۲+۴(t+۳)+۵=t^۲+۱\circ t+۲۶$$

لذا $g(x)=u_۳(x)f(x-۳)$ بنابراین $G(s)=\mathcal{L}(g(x))=e^{-۳s}(\frac{۲}{s^۳}+\frac{۱\circ}{s^۲}+\frac{۲۶}{s})$

مثال ۱۴.۷ لاپلاس تابع $g(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & x\geq ۱, \\ \circ & \circ\leq x<۱. \end{cases}$ چیست؟

حل. با تغییر متغیر $x=t+۱$ تابع بشکل $g(t)=u_۱(t)(t^۲+۲t)$ در می آید سپس

$$G(s)=e^{-s}(\frac{۲}{s^۳}+\frac{۲}{s^۲})$$

مثال ۱۵.۷ لاپلاس تابع $g(x)=\begin{cases} \sin x & \circ\leq x<\pi, \\ \cos x & \pi\leq x<۲\pi, \\ x & x\geq ۲\pi. \end{cases}$ را بیابید.

حل. با توجه به فرمول (۱) می نویسیم:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin x + u_\pi(x)(\cos x - \sin x) + u_{۲\pi}(x - \cos x) \\ &= \sin x + u_\pi(x)(\cos(x-\pi+\pi) - \sin(x-\pi+\pi)) \\ &\quad + u_{۲\pi}(x - ۲\pi + ۲\pi - \cos(x - ۲\pi + ۲\pi)) \\ &= \sin x + u_\pi(x)(-\cos(x-\pi) + \sin(x-\pi)) \\ &\quad + u_{۲\pi}(x)(x - ۲\pi + ۲\pi - \cos(x - ۲\pi)) \\ G(s) &= \frac{۱}{s^۲+۱} + e^{-\pi s}(-\frac{s}{s^۲+۱} + \frac{۱}{s^۲+۱}) + e^{-۲\pi s}(\frac{s}{s^۲} + \frac{۲\pi}{s} - \frac{s}{s^۲+۱}) \end{aligned}$$

مثال ۱۶.۷ مطلوبست تبدیل لاپلاس $f(t) = \begin{cases} \sin t - \cos(t - \frac{\pi}{۳}) & , \quad t \geq \frac{\pi}{۳}, \\ \sin t & , \circ \leq t < \frac{\pi}{۳}. \end{cases}$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin t - \cos(t - \frac{\pi}{۳}) \begin{cases} ۱ & , \quad t \geq \frac{\pi}{۳}, \\ \circ & , \circ \leq t < \frac{\pi}{۳}. \end{cases} \\ &= \sin t - \cos(t - \frac{\pi}{۳}) u_{\frac{\pi}{۳}}(t) \\ \mathcal{L}(f) &= \frac{۱}{s^۲+۱} - \frac{s}{s^۲+۱} e^{-\frac{\pi}{۳}s} \\ &= \frac{۱ - s e^{-\frac{\pi}{۳}s}}{s^۲+۱} \end{aligned}$$

اکنون حاضریم تا تبدیل لاپلاس تابع دیراک و ضربه را برای استفاده های آتی بیابیم. تبدیل لاپلاس تابع دیراک چنین است

$$\mathcal{L}(d_\varepsilon(t)) = \int_\circ^\varepsilon e^{-st} \frac{۱}{\varepsilon} dt = \frac{e^{-st}}{-s\varepsilon}\Big|_\circ^\varepsilon = \frac{۱ - e^{-s\varepsilon}}{s\varepsilon} \qquad (۱۱)$$

که بنابر هوپیتال $\lim_{\varepsilon \to \circ} \mathcal{L}(d_\varepsilon(t)) = ۱$ از طرفی از لحاظ ریاضی مقدار $\lim_{\varepsilon \to \circ} d_\varepsilon(t)$ وجود ندارد و لذا $\mathcal{L}(\lim_{\varepsilon \to \circ} d_\varepsilon(t))$ نیز تعریف نشده خواهد بود. برای تابع دلتا داریم $\delta(t-c) = \circ$ که $t \neq c$ چون $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-c) dt = ۱$ لذا

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\delta(t-c)) &= \lim_{\varepsilon \to \circ} \mathcal{L}(d_\varepsilon(t-c)) \\ &= \lim_{\varepsilon \to \circ} \int_c^{c+\varepsilon} e^{-st} \frac{۱}{\varepsilon} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \to \circ} \frac{۱}{s\varepsilon}(e^{-cs} - e^{-(c+\varepsilon)s}) \\ &= e^{-cs} \lim_{\varepsilon \to \circ} \frac{۱ - e^{-s\varepsilon}}{s\varepsilon} \\ &= e^{-cs} \end{aligned}$$

برای $c=0$ نیز $\mathcal{L}(\delta(t))=1$ خواهد بود. لاپلاس چند تابع بالا بطور خلاصه عبارتست از

$$\begin{array}{rcll}
f(t) & \Longrightarrow & F(s) & c,s>0 \\
u_c(t) & \Longrightarrow & \dfrac{e^{-cs}}{s} & (12) \\
u_c(t)f(t-c) & \Longrightarrow & e^{-cs}F(s) & (13) \\
\delta(t-c) & \Longrightarrow & e^{-cs} & (14)
\end{array}$$

تمرین ۳.۷ .

۱) با استفاده از جدول تبدیلات لاپلاس، لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$$\begin{array}{llllll}
(a) & e^t\sin 2t &, (b) & te^{3t} &, (c) & t^2(e^{-t}+3e^t) \\
(d) & e^{-3t}\sin 4t &, (e) & e^{3t}\sin(t-\frac{\pi}{3}) &, (f) & 2e^{2t}\sinh 3t \\
(g) & \cosh 2x\sinh 3x &, (h) & \sinh at\cosh bt &, (i) & \sinh at\cos bt \\
(j) & u_{\frac{\pi}{2}}(t)\cos 2t &, (k) & u_{\frac{\pi}{4}}(t)\sin t &, (l) & u_{\frac{\pi}{6}}(t)\cos t \\
(m) & u_{\frac{\pi}{2}}(t)\cos t &, (n) & u_{\frac{\pi}{2}}(t)e^{3t} &, (o) & 3e^{2t}u_{\frac{\pi}{2}}(t)\cosh 2t
\end{array}$$

$$(p)\ \begin{cases} x & 0\le x<3, \\ 0 & x\ge 3. \end{cases} \quad , (q)\ \begin{cases} 2x^3-12x^2+25x-17 & 0\le x\le 2, \\ 0 & x>2. \end{cases}$$

$$(r)\ \begin{cases} \cos t & 0\le t<\pi, \\ \sin t & t\ge\pi. \end{cases} \quad , (s)\ \begin{cases} 1 & 0\le t\le 2, \\ 2t & 2\le t\le 3, \\ t-1 & 3\le x\le 6, \\ 4 & t\ge 6. \end{cases}$$

$$(t)\ \begin{cases} e^t+sint & , 0\le t<2\pi, \\ e^t+cost & , t\ge 2\pi. \end{cases} \quad , (u)\ 3u_1(t)+u_2(t)+2u_3(t)$$

$$(v)\ u_1(t)u_2(t)u_3(t) \quad , (w)\ (t-1)u_1(t)+(t-2)u_2(t)+(t-3)u_3(t)$$

۲) در خاصیت اولین انتقال، ناحیهٔ وجود تبدیل لاپلاس $e^{ct}f(t)$ چیست؟ معادلهٔ (۷) را ثابت کنید.

۳) برای $\alpha>0$ حقیقی ثابت کنید

$$\mathcal{L}\Big(u_\alpha(t)+u_{2\alpha}(t)+u_{3\alpha}(t)+u_{4\alpha}(t)+\cdots\Big)=\frac{1}{s(e^{\alpha s}-1)} \qquad (15)$$

۴) نشان دهید اگر تابع دیراک به شکل (۴) نیز تعریف شود داریم $\mathcal{L}(\delta(t-c))=e^{-cs}$.

۵) طبق محاسبات متن $\mathcal{L}(\delta(t))=1$ اما $\lim\limits_{s\to\infty}F(s)=0$ این چگونه توجیه می شود؟

۶) اگر $\mathcal{L}(f(t))=F(s)$ نشان دهید تبدیل لاپلاس تابع $f(ct)$ عبارتست از $\frac{1}{c}F(\frac{s}{c})$.

۲.۲.۷ لاپلاس توابع متناوب

اگر $f(t)$ تابعی متناوب با دوره تناوب $T > ۰$ بوده و روی $[۰, T]$ دارای تبدیل لاپلاس باشد سپس برای $s > ۰$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{\int_۰^T e^{-st} f(t)dt}{۱ - e^{-sT}} \tag{۱۶}$$

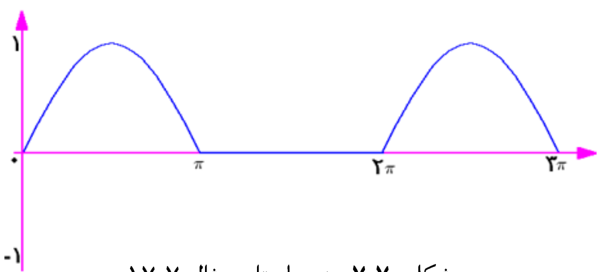
زیرا با اعمال تغییر متغیر روی هر بازهٔ $[nT, (n+۱)T]$ بشکل $x = t - nT$ می نویسیم:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f) &= \int_۰^\infty e^{-st} f(t)dt \\
&= \int_۰^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^{۲T} e^{-st} f(t)dt + \int_{۲T}^{۳T} e^{-st} f(t)dt + \cdots \\
&= (۱ + e^{-sT} + e^{-۲sT} + e^{-۳sT} + \cdots) \int_۰^T e^{-st} f(t)dt \\
&= \frac{۱}{۱ - e^{-sT}} \int_۰^T e^{-st} f(t)dt
\end{aligned}$$

مثال ۱۷.۷ مطلوبست لاپلاس $f(x) = \begin{cases} \sin t & , ۰ \leq t < \pi, \\ ۰ & , \pi \leq t < ۲\pi. \end{cases}$ با دورهٔ تناوب ۲π.

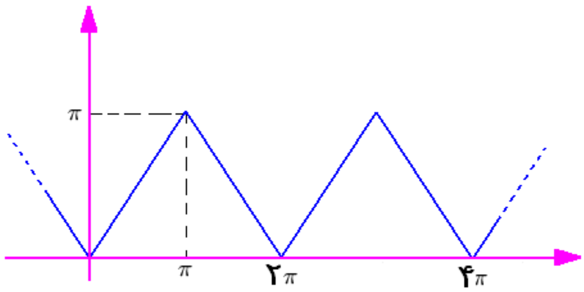
حل.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f) &= \frac{۱}{۱ - e^{-۲\pi s}} \int_۰^{۲\pi} e^{-st} f(t)dt \\
&= \frac{۱}{۱ - e^{-۲\pi s}} \int_۰^{\pi} e^{-st} \sin t \, dt \\
&= \frac{۱}{۱ - e^{-۲\pi s}} \left[\frac{e^{-st}(-s \sin t - \cos t)}{s^۲ + ۱} \right]_۰^\pi \\
&= \frac{۱}{۱ - e^{-۲\pi s}} \frac{۱ + e^{-\pi s}}{s^۲ + ۱} \\
&= \frac{۱}{(۱ - e^{-\pi s})(s^۲ + ۱)}
\end{aligned}$$



شکل ۷.۷ نمودار تابع مثال ۱۷.۷

مثال ۱۸.۷ تبدیل لاپلاس تابع تناوبی به شکل زیر را بیابید.



شکل ۸.۷ نمودار تابع مثال ۱۸.۷

حل. از روی شکل تابع را بصورت $f(x)=\begin{cases} t & , 0\le t<\pi, \\ 2\pi-t & , \pi\le t<2\pi. \end{cases}$ نوشته که تابعی متناوب با دوره تناوب $T=2\pi$ است طبق (۱۶) داریم:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f) &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi} e^{-st}f(t)dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[\int_0^{\pi} te^{-st}dt+\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-t)e^{-st}dt\right] \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[\frac{-t}{s}e^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^{\pi}+\frac{-(2\pi-t)}{s}e^{-st}+\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\frac{1}{s^2}\left[e^{-2\pi s}-2e^{-\pi s}+1\right] \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\frac{1}{s^2}\left[e^{-\pi s}-1\right]^2 \\
&= \frac{1}{s^2}tgh\frac{\pi s}{2}
\end{aligned}
$$

مثال ۱۹.۷ مطلوبست لاپلاس تابع جزء صحیح $f(t)=[t]$.

حل. ابتدا برای تابع متناوب $f(t)=t-[t]$ با دوره تناوب $T=1$ می نویسیم:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f) &= \frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 e^{-st}(t-[t])dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 t.e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-s}}\left[\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}\right]
\end{aligned}
$$

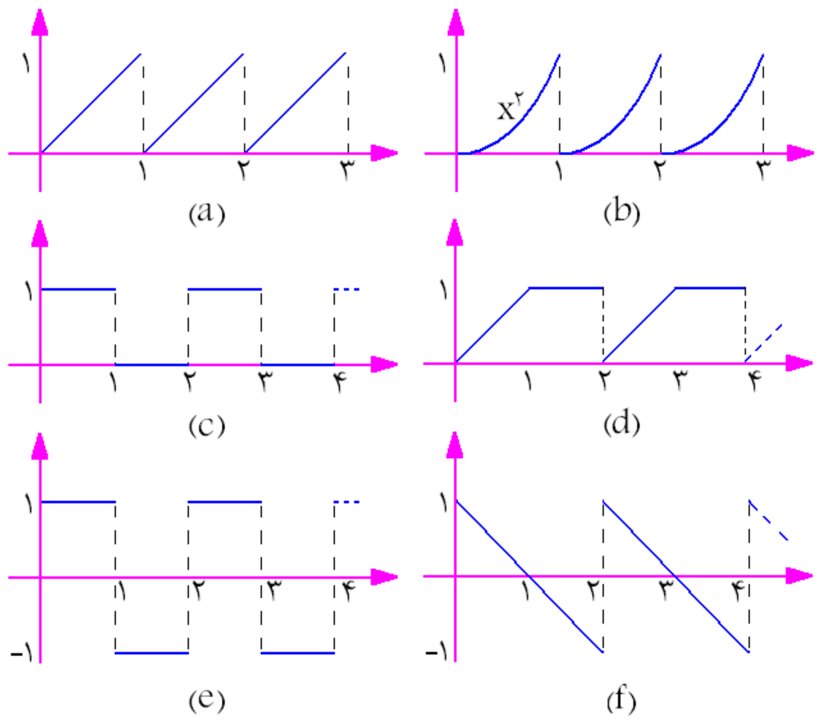
سپس

$$\mathcal{L}([t]) = \mathcal{L}(t-(t-[t])) = \frac{۱}{s^{۲}} - \mathcal{L}(t-[t]) = \frac{۱}{s(e^{s}-۱)}$$

با (۱۵) مقایسه کنید.

تمرین ۴.۷ .

۱) تبدیل لاپلاس توابع تناوبی با اشکال زیر را بیابید.



شکل ۹.۷ نمودار توابع تمرین ۱

۲) برای تابع $f(t) = |\sin at|$ با تناوب $T = \frac{\pi}{a}$ نشان دهید $\mathcal{L}(f) = \frac{a}{s^{۲}+a^{۲}} cotgh(\frac{\pi s}{۲a})$.

۳) ثابت کنید اگر برای تابع $f(t)$ و عددی مانند T داشته باشیم $f(x+T) = -f(x)$ سپس

$$\mathcal{L}(f) = \frac{\int_{۰}^{T} e^{-st} f(t)dt}{۱+e^{-sT}}$$

از این خاصیت برای یافتن لاپلاس تابع $f(t) = \sin t$ با $T = \pi$ استفاده نمائید و نشان دهید $\mathcal{L}(f) = \frac{۱}{s^{۲}+۱}$.